: 1

ليكن f التطبيق من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}-\{i\}$ المعرف بما يلي :

$$f(z)=\frac{iz}{z-i}$$

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$،

نعتبر النقطة B ذات اللحق i ونربط كل نقطة M بلحقها z.

1. حدد المجموعتين التاليتين :

$$E_1=\{M(z)\ /\ f(z)\in\mathbb{R}\}$$

$$E_2=\{M(z)\ /\ f(z)\in i\mathbb{R}\}$$

2. حل في $\mathbb{C}-\{i\}$ المعادلة $f(z)=-2z+1$.

3. ليكن $z\in\mathbb{C}-\{i\}$. نعتبر r معيارا ل $z-i$ و α قياسا لعمدة $z-i$.

أ- أكتب $f(z)-i$ على الشكل المثلثي.

ب- حدد $(\mathscr{C})$، مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون : $|f(z)-i|=\sqrt{2}$.

جـ- حدد $(\mathscr{D})$، مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون : $\frac{\pi}{4}$ قياسا لعمدة $f(z)-i$.

د- حدد z_0 بحيث $f(z_0)=1+2i$. لتكن A النقطة ذات اللحق z_0. تحقق من أن A تنتمي إلى $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{D})$.

أنشئ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{D})$.

: 2

A نضع : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ j est l l'entier de JACOBI

(j هو جذر من الرتبة الثالثة للوحدة : $j^3=1$)

1. تحقق من أن : $j^2=\overline{j}$ و أن $1+j+j^2=0$.
2. أكتب على الشكل المثلثي العددين العقديين $2i$ و $2ij$.

B نعتبر P و Q التطبيقين من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرفين كما يلي :

$$P(z)=(z-2i\overline{j})Q(z)$$

$$Q(z)=z^2+2ij^2z-4j \text{ و}$$

1. أ- نعتبر المعادلة :

$$(E_1):(\ z\in\mathbb{C}\ :\ Q(z)=0\ )$$

تحقق من أن المميز المختصر Δ' يساوي $(\sqrt{3}j^2)^2$

ب- حل المعادلة : (E_1)

جـ- أكتب حلي المعادلة (E_1) على الشكل المثلثي وعلى الشكل λi و λij حيث : $(\lambda\in\mathbb{R})$.

2. أ- أنشر $P(z)$.

ب- استنتج حلول المعادلة :

$$(E):\ (\ z\in\mathbb{C}\ :\ z^3+8i=0\ )$$

3. لتكن a و b و c هي حلول المعادلة (E) بحيث :

$$\mathrm{Re}(a)=0 \text{ و } \mathrm{Re}(b)<0 \text{ و } \mathrm{Re}(c)>0$$

أ- تحقق من أن : $a+bj+cj^2=0$

ب- في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c. بين أن ABC مثلث متساوي الأضلاع.

: 3

1. بين أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ e^{2ix}-1=2i\sin(x)e^{ix}$$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(Z+1)^n=e^{2ina}$ ، حيث : $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*$

3. نضع : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ P_n=\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$.

أثبت أن : $P_n=\frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

: 4

ليكن θ عددا حقيقيا . لكل z من $\mathbb{C}$. نضع :

$$P(z)=z^3+(1+3ie^{i\theta})z^2+(1+i(1+3e^{i\theta}))z+(3i-3)e^{i\theta}$$

1. بين أن $z_1=-3ie^{i\theta}$ حل للمعادلة :

$$(E):\ z\in\mathbb{C}\ ,\ P(z)=0$$

2. أ- حدد العددين العقديين a و b بحيث :

$$\forall z\in\mathbb{C}:\ P(z)=(z+3ie^{i\theta})(z^2+az+b)$$

ب- ليكن z_2 و z_3 الحلين الآخرين للمعادلة (E).

حدد z_2 و z_3 (z_2 هو الحل التخيلي الصرف)

3. أ- أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي .

ب- نضع : $\theta=\frac{\pi}{10}$. حدد الشكل الجبري للعدد العقدي α

حيث : $\alpha = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5$

: 5

المستوى العقدي $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. لكل z من $\mathbb{C}$، نضع $f(z) = z^2 - 2jz - 1$

حيث $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = 0$.
2. حدد وأنشئ المجموعة :

$$(H) = \{ M(z) \in P \;/\; f(z) \in \mathbb{R} \}$$

3. ليكن التطبيق :

$$F \;:\; \mathscr{P} \to \mathscr{P}$$
$$M(z) \mapsto M'(f(z))$$

ولتكن $(\mathscr{C})$ الدائرة التي مركزها $A(j)$ وشعاعها r و $(\mathscr{D})$ المستقيم الذي يمر من A ومعامله الموجه $\tan(\theta)$ حيث : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

أ- تحقق من أن : $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) - j = (z - j)^2$

ب- حدد طبيعة صورة كل من المجموعتين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{D})$ بالتطبيق F .

: 6

في المستوى الأقليدي $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$، نعتبر النقطتين $A(i)$ و $A'(-i)$، وليكن f التطبيق من $\mathbb{C} - \{i\}$ نحو $\mathbb{C}$ والمعرف بما يلي :

$$f(z) = \frac{\overline{z}(z - i)}{\overline{z} + i}$$

وليكن F التطبيق من $\mathscr{P} - \{A\}$ نحو $\mathscr{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث : $z' = f(z)$.

1. أ- أثبت أنه إذا كان $z \neq 0$ و $z' \neq 0$ فإن :

$$|z| = |z'|$$

و $\arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z - i) \; [2\pi]$

(لاحظ أن $z - i$ و $\overline{z} + i$ مترافقان)

ب- بين أنه إذا كان $|z| = 1$ فإن $f(z) = -i$.

2. أ- حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F .

ب- ماهي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل ai مع a عنصر من $\mathbb{R}$ ؟

3. أ- أثبت أن : $z' + i = \frac{z\overline{z} - 1}{|\overline{z} + i|^2}(z - i)$.

وأن : $z' - z = \frac{-i(z + \overline{z})}{|\overline{z} + i|^2}(z - i)$.

ب- استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان . وأن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان .

جـ- أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F .

: 7

نضع : $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي $a = 8$ و $b = 6j$ و $c = 8j^2$.

لتكن A' صورة B بالدوران $R\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$.

B' صورة C بالدوران $R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$.

C' صورة A بالدوران $R\left(B, \frac{\pi}{3}\right)$.

1. أنشئ النقط A و B و C و A' و B' و C'.
2. نضع a' و b' و c' على التوالي ألحاق النقط A' و B' و C'

أ- أحسب a' . (تحقق من أن $a' \in \mathbb{R}$)

ب- بين أن : $b' = 16\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$، واستنتج أن $O \in (BB')$.

جـ- بين أن : $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.

د- بين أن المستقيمات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في النقطة O.

3. فيما يلي نود أن نبين أن المسافة $MA + MB + MC$ تكون دنوية إذا كان $M = O$.

أ- أحسب $OA + OB + OC$.

ب- بين أن : $j^3 = 1$ و $1 + j + j^2 = 0$.

جـ- لتكن M النقطة التي لحقها z. تحقق مما سبق أن :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| =$$
$$|a + bj + cj^2| = 22$$

د- نقبل أن لكل الأعداد العقدية z و z' و z'' ، لدينا :

$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$$

بين أن المسافة $MA + MB + MC$ تكون دنوية إذا كان $M = O$.

(النقطة $M = O$ تسمى نقطة Torricelli)